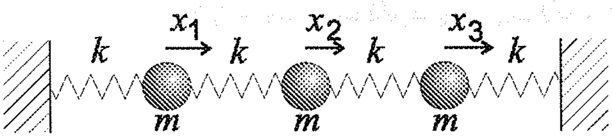
連成振動のいくつかの解き方ー３個の質点と４本のばねの例



運動方程式

$$
\begin{cases}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - k(x_1-x_2) = -k(2x_1-x_2), \\
m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2-x_1) - k(x_2-x_3) = -k(2x_2-x_1-x_3), \\
m\frac{d^2x_3}{dt^2} = -k(x_3-x_2) - kx_3 = -k(2x_3-x_2).
\end{cases}
\tag{1}
$$

それぞれの質点に働く力は、次のポテンシャル $U(x_1,x_2,x_3)$ からも導かれる。

$$
\begin{aligned}
U(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_2-x_3)^2 + \frac{1}{2}kx_3^2 \\
&= \frac{1}{2}k(2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2k, & -k, & 0 \\ -k, & 2k, & -k \\ 0, & -k, & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

各質点に働く力は

$$
\begin{cases}
F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -k(2x_1-x_2), \\
F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -k(2x_2-x_1-x_3), \\
F_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = -k(2x_3-x_2).
\end{cases}
\tag{3}
$$

【解き方１】

$$
x_1 = A_1e^{i\omega t}, \quad x_2 = A_2e^{i\omega t}, \quad x_3 = A_3e^{i\omega t}
\tag{4}
$$

の形の解を求める。(4) 式を (1) 式に代入して整理すると次式を得る：

$$
\begin{cases}
(2k-m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0, \\
-kA_1 + (2k-m\omega^2)A_2 - kA_3 = 0, \\
-kA_2 + (2k-m\omega^2)A_3 = 0.
\end{cases}
\tag{5}
$$

$A_1=A_2=A_3=0$ 以外の解を持つ条件は、A_1, A_2, A_3 の係数行列式=0 という次の条件で与えられる。

$$
\begin{vmatrix}
(2k-m\omega^2), & -k, & 0 \\
-k, & (2k-m\omega^2), & -k \\
0, & -k, & (2k-m\omega^2)
\end{vmatrix} = 0.
\tag{6}
$$

(6) 式を満たす ω の値としては、次の３つの値が得られる：

$$\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_0, \quad \omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0, \quad (\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}). \tag{7}$$

(a) $\omega = \omega_1$ のとき

(5) 式より、$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : \sqrt{2} : 1$ と求まる。

一般に、$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$, $x_2 = A_2 e^{i\omega t}$, $x_3 = A_3 e^{i\omega t}$ が解ならば、$x_1 = A_1^* e^{-i\omega t}$, $x_2 = A_2^* e^{-i\omega t}$, $x_3 = A_3^* e^{-i\omega t}$ も解になっていることを用いると、$A_1 = a_1 e^{i\theta_1}$ (a_1, θ_1 は実数) とおいて、実数解としては

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad x_2 = \sqrt{2}\, a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1), \quad x_3 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \tag{8}$$

を得る。

(b) $\omega = \omega_2$ のとき

(5) 式より、$A_1 : A_3 = 1 : -1$, $A_2=0$ と求まる。

従って、この場合には、$A_1 = a_2 e^{i\theta_2}$ (a_2, θ_2 は実数) とおいて、実数解としては

$$x_1 = a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \tag{9}$$

を得る。

(c) $\omega = \omega_3$ のとき

(5) 式より、$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : -\sqrt{2} : 1$ と求まる。

従って、この場合、、$A_1 = a_3 e^{i\theta_3}$ (a_3, θ_3 は実数) とおいて、実数解としては

$$x_1 = a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3), \quad x_2 = -\sqrt{2}\, a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3), \quad x_3 = a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3) \tag{10}$$

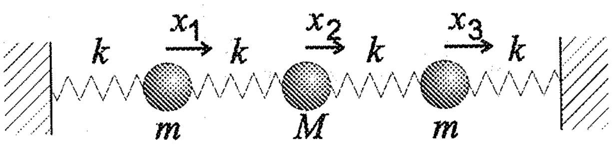
を得る。

これら３つの独立な解の重ね合わせから一般解として、

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3), \\ x_2 &= \sqrt{2}\, a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - \sqrt{2}\, a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3), \\ x_3 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + a_3 \cos(\omega_3 t + \theta_3), \end{aligned} \tag{11}$$

を得る。６つの未知数（積分定数）$a_1, a_2, a_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ は、t=0 における $x_1, x_2, x_3, dx_1/dt, dx_2/dt, dx_3/dt$ の値（初期条件）から定まる。

[応用例１] 質点の質量が異なる場合



両端の質点の質量が m、中央の質点の質量が M の場合：

(1) 式の中央式の左辺の質量が M に、(5) 式の中央式の A_2 の係数が $2k - M\omega^2$ になるだけ。従って、条件 (6) 式は次のように変わる：

$$\begin{vmatrix} (2k - m\omega^2), & -k, & 0 \\ -k, & (2k - M\omega^2), & -k \\ 0, & -k, & (2k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

これを満たす ω の値としては、次の３つの値が得られる：

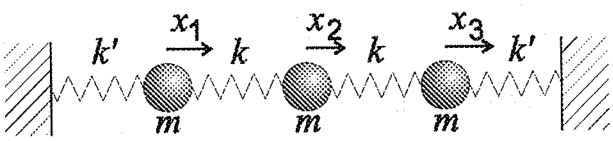
$$\omega_1 = \sqrt{1 + \alpha - \sqrt{1+\alpha^2}}\,\omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_0, \quad \omega_3 = \sqrt{1 + \alpha + \sqrt{1+\alpha^2}}\,\omega_0. \tag{13}$$

ただし、$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}, \quad \alpha \equiv m/M$。

$\omega = \omega_1$ のときは、$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : (1 - \alpha + \sqrt{1+\alpha^2}) : 1$、$\omega = \omega_2$ $A_1 : A_3 = 1 : -1, A_2 = 0$

$\omega = \omega_3$ のときは、$A_1 : A_2 : A_3 = 1 : (1 - \alpha - \sqrt{1+\alpha^2}) : 1$ と求まる。従って、$\alpha = 1$ すなわち $m = M$ の場合には、前に求めた結果とすべて一致することがわかる。

[応用例２] ばね定数が異なる場合



両端の２つのばねの定数が k'、中央の２つのばねの定数が k の場合：

運動方程式は次のように表される：

$$\begin{cases} m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k'x_1 - k(x_1 - x_2) = -((k'+k)x_1 - kx_2), \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = -k(2x_2 - x_1 - x_3), \\ m\frac{d^2x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2) - k'x_3 = -((k'+k)x_3 - kx_2). \end{cases} \tag{14}$$

また、ポテンシャル $U(x_1, x_2, x_3)$ は

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2}k'x_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}k'x_3^2 \\ &= \frac{1}{2}((k'+k)x_1^2 + 2kx_2^2 + (k'+k)x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k'+k, & -k, & 0 \\ -k, & 2k, & -k \\ 0, & -k, & k'+k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

となる。

(5) 式と (6) 式に相当する式は今の場合次のようになる：

$$\begin{cases} (k'+k-m\omega^2)A_1 & -kA_2 & & = 0, \\ -kA_1 & +\ (2k-m\omega^2)A_2 & -kA_3 & = 0, \\ & -kA_2 & +\ (k'+k-m\omega^2)A_3 & = 0. \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{vmatrix} (k'+k-m\omega^2), & -k, & 0 \\ -k, & (2k-m\omega^2), & -k \\ 0, & -k, & (k'+k-m\omega^2) \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

これを満たす ω の値としては、次の３つの値が得られる：

$$\omega_1 = \left[(3+\beta)/2 - \sqrt{(1-\beta)^2/4+2}\right]^{1/2}\omega_0, \tag{18}$$

$$\omega_2 = \sqrt{1+\beta}\,\omega_0, \tag{19}$$

$$\omega_3 = \left[(3+\beta)/2 + \sqrt{(1-\beta)^2/4+2}\right]^{1/2}\omega_0. \tag{20}$$

ただし、$\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$,　$\beta \equiv k'/k$。$\beta = 1$ すなわち $k' = k$ の場合には、前に求めた結果と一致する。

【解き方２】 運動方程式 (1) は次の形に書くこともできる：

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}\,\mathbf{F}. \tag{21}$$

ここで、

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_1,\ x_2,\ x_3), \quad \mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} 2k, & -k, & 0 \\ -k, & 2k, & -k \\ 0, & -k, & 2k \end{pmatrix}. \tag{22}$$

$\mathbf{F}$ は 3×3 の対称行列である。対称行列は一般に直交変換で対角化が可能。

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} K_1, & 0, & 0 \\ 0, & K_2, & 0 \\ 0, & 0, & K_3 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

K_1, K_2, K_3 は行列 $\mathbf{F}$ の固有値を表し、$\mathbf{T}$ は $\mathbf{F}$ を対角化する直交行列で、$\mathbf{T}^{-1}$ は $\mathbf{T}$ の逆行列である。$\mathbf{T}$、$\mathbf{T}^{-1}$ は具体的に次のように表される。

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \ell_1, & \ell_2, & \ell_3 \\ m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \ell_1, & m_1, & n_1 \\ \ell_2, & m_2, & n_2 \\ \ell_3, & m_3, & n_3 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

また、

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ell_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ell_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{はそれぞれ固有値 } K_1, K_2, K_3 \text{ に} \tag{25}$$

に対応する固有ベクトルで、次の関係を満たす。

$$\ell_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{26}$$

$$\ell_i\ell_j + m_i m_j + n_i n_j = 0 \qquad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3). \tag{27}$$

$\mathbf{F}$ が (22) 式で与えられるとき、その固有値は

$$K_1 = (2 - \sqrt{2})k, \quad K_2 = 2k, \quad K_3 = (2 - \sqrt{2})k \tag{28}$$

直交行列 $\mathbf{T}$ は

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & 0, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

と求まる。

(21) 式を

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}\mathbf{T} = -\boldsymbol{x}\mathbf{T}\,\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T} \tag{30}$$

と変形し、

$$\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3) = \boldsymbol{x}\mathbf{T} \tag{31}$$

で新しい座標 Q_1, Q_2, Q_3 を定義すれば、(30) 式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}(Q_1, Q_2, Q_3) = -(Q_1, Q_2, Q_3)\begin{pmatrix} K_1, & 0, & 0 \\ 0, & K_2, & 0 \\ 0, & 0, & K_3 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

と書くことができる。従って、K_1, K_2, K_3 が (28) 式で与えられることを用いると、Q_1, Q_2, Q_3 に関する次の独立な３つの式を得る：

$$\begin{cases} \frac{d^2Q_1}{dt^2} = -\omega_1^2 Q_1, & (\omega_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0), \\ \frac{d^2Q_2}{dt^2} = -\omega_2^2 Q_2, & (\omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_0), \qquad (\omega_0 = \sqrt{k/m}) \cdot \\ \frac{d^2Q_3}{dt^2} = -\omega_3^2 Q_3, & (\omega_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0), \end{cases} \tag{33}$$

これは、Q_1, Q_2, Q_3 がそれぞれ、角振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の単振動（調和振動）をすることを示しており、Q_1, Q_2, Q_3 の時間変化は一般的に

$$\begin{cases} Q_1 = a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1), \\ Q_2 = a_2\cos(\omega_2 t + \theta_2), \\ Q_3 = a_3\cos(\omega_3 t + \theta_3), \end{cases} \tag{34}$$

で表される。Q_1, Q_2, Q_3 を基準座標、Q_1, Q_2, Q_3 の振動を基準振動、$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を基準角振動数と呼ぶ。Q_1, Q_2, Q_3 と x_1, x_2, x_3 とには

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_3, \\ Q_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \end{cases} \tag{35}$$

の関係があるので、逆に解いて

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}Q_2 + \frac{1}{2}Q_3 \\ \quad = \frac{1}{2}a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}a_2\cos(\omega_2 t + \theta_2) + \frac{1}{2}a_3\cos(\omega_3 t + \theta_3), \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}Q_3 \\ \quad = \frac{\sqrt{2}}{2}a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) - \frac{\sqrt{2}}{2}a_3\cos(\omega_3 t + \theta_3), \\ x_3 = \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}Q_2 + \frac{1}{2}Q_3 \\ \quad = \frac{1}{2}a_1\cos(\omega_1 t + \theta_1) - \frac{\sqrt{2}}{2}a_2\cos(\omega_2 t + \theta_2) + \frac{1}{2}a_3\cos(\omega_3 t + \theta_3), \end{cases} \tag{36}$$

と表せる。

自由度が大きい場合

質点の数を N とし、質量 m とバネ定数 k は全て共通にとる。各質点に対する運動方程式は、

$$
\begin{aligned}
&m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(2x_1 - x_2),\\
&m\frac{d^2x_n}{dt^2} = -k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \quad (n = 2, 3, \cdots, N-1)\\
&m\frac{d^2x_\mathrm{N}}{dt^2} = -k(2x_\mathrm{N} - x_{\mathrm{N}-1}).
\end{aligned} \tag{37}
$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ と置き、規準振動を求めるため $x_n = A_n \mathrm{e}^{i\omega t}$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ の形の解を仮定すると、A_n に対する連立方程式として

$$
\begin{aligned}
&(2\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 = 0,\\
&-\omega_0^2 A_{n-1} + (2\omega_0^2 - \omega^2)A_n - \omega_0^2 A_{n+1} = 0, \quad (n = 2, 3, \cdots, N-1)\\
&-\omega_0^2 A_{N-1} + (2\omega_0^2 - \omega^2)A_N = 0,
\end{aligned} \tag{38}
$$

が得られる。$A_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ 以外の解を持つためには、

$$
\begin{vmatrix}
2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots\cdots & & 0\\
-\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots & 0\\
0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & \cdots & 0\\
0 & 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & \cdots\ \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2
\end{vmatrix} = 0 \tag{39}
$$

を解いて固有振動数 ω_μ $(\mu = 1, 2, \cdots, N)$ を求め、各 ω_μ について $A_n^\mu = 0$ $(n = 1, 2, \cdots, N)$ を求めるのが前の方法の一般化だが、質点の数だけ方程式があり、大規模な連立方程式を解かなくてはならない。

ここでは別の解き方を考える：両端での仮想的な x_0, x_{N+1} を導入すると、運動方程式は

$$
\frac{d^2x_n}{dt^2} + \omega_0^2(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N). \tag{40}
$$

ただし、

$$
x_0 = 0, \quad x_{N+1} = 0 \tag{41}
$$

という付帯条件をつける。前と同様 $x_n = A_n \mathrm{e}^{i\omega t}$ の形の解を求めると、A に対する方程式として

$$
\begin{aligned}
&-\omega^2 A_n + \omega_0^2(2A_n - A_{n-1} - A_{n+1}) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, N)\\
&A_0 = 0, \quad A_{N+1} = 0
\end{aligned} \tag{42}
$$

が得られる。今の場合、両端が固定されていて動かないため、定常波の解の形を仮定して次のようにおく：

$$
A_n = A \sin kna \ + \ B \cos kna. \tag{43}
$$

ただし、a は平衡状態でのバネの長さを表わし、従って na は n 番目の質点の平衡位置をバネの左端を原点として表わした距離を表わす。付帯条件より、

$$A_0 = 0 \quad \text{より} \quad B = 0 \ \text{かつ} \ A \neq 0,$$
$$A_{N+1} = 0 \quad \text{より} \quad A \sin k(N+1)a = 0.$$

これより、許される波数 k の値は

$$k_\mu = \frac{\mu\pi}{(N+1)a}, \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, N) \tag{44}$$

のいずれかでなければならない。$A_n = A \sin kna$ をもとの方程式に代入すると、

$$(2\omega_0^2 - \omega^2 - 2\omega_0^2 \cos ka) \sin kna = 0. \tag{45}$$

これが任意の n について常に成り立つためには、ω と k の間に

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos ka) = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \tag{46}$$

が成り立たなければならない。$\omega > 0$ とすると、

$$\omega = 2\omega_0 \sin \frac{ka}{2} \tag{47}$$

となる。ただし、

$$k = \frac{\mu\pi}{(N+1)a}, \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, N). \tag{48}$$

この ω が固有振動を表わす。固有振動数 ω と波数 k の関係を**分散関係**という。k はとびとびの値 k_μ しか持たないので、ω もとびとびの値 ω_μ となる。

以上をまとめると、この系は N 個の規準振動を持ち、第 μ 番目の規準振動は

$$\omega_\mu = 2\omega_0 \sin \frac{k_\mu a}{2} = 2\omega_0 \sin \frac{\mu\pi}{2(N+1)} \tag{49}$$

を固有角振動数とし、各点の変位が

$$\begin{aligned} x_\mu &= \sin k_\mu na (A_\mu e^{i\omega_\mu t} + A_\mu^* e^{-i\omega_\mu t}) \\ &= \sin k_\mu na \cdot a_\mu \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu) \\ &= a_\mu \sin \frac{\mu n\pi}{N+1} \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu) \end{aligned} \tag{50}$$

で与えられる。ただし、$\mu = 1, 2, \cdots, N$ はモードを指定する指標 (index)、a_μ, φ_μ は μ 番目の規準振動で各質点に共通な積分定数を表わす。

一般解は N 個の規準振動の線形結合で与えられる：

$$x_n = \sum_{\mu=1}^{N} a_\mu \sin k_\mu na \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu). \tag{51}$$

つまり、上で求めた規準振動だけで一般解が書けることが重要な性質である。